УДК 521.13

А. Б. Афонасьева, А. А. Зайцев

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА О ДВУХ ПРИТЯГИВАЮЩИХ ЦЕНТРАХ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Установлено, что в задаче Эйлера о двух притягивающих центрах кроме закона сохранения энергии существует еще один закон сохранения, который также квадратичен по скоростям. Благодаря обоим законам сохранения и с помощью эллиптических координат существенно упрощается процедура получения уравнений траекторий.

The article establishes that Euler's problem of two attractive centres contains another conservation law alongside with the energy conservation one, which is also quadratic in velocities. These conservation laws and elliptic coordinates considerably simplify the procedure of trajectory equations generation.

Ключевые слова: притягивающие центры, законы сохранения, эллиптические координаты, интегрирование, уравнения траекторий.

Keywords: attractive centres, conservation laws, elliptic coordinates, integration, trajectory equations.

Введение

В 1760 г. Л. Эйлер занялся изучением следующей задачи. Пусть на плоскости Oxy находятся две неподвижные материальные точки (центры) с массами m_1 и m_2 и третья материальная точка (пробное тело) единичной массы движется под действием сил гравитационного притяжения неподвижных центров (рис.). Пусть координаты притягивающих центров есть (c,0) и (–c,0), c>0. Тогда, согласно закону всемирного тяготения и второму закону Ньютона, уравнения движения пробной частицы имеют вид:

$$\ddot{x} = X, \quad \ddot{y} = Y,$$

$$X = -\frac{M_1(x-c)}{r_1^3} - \frac{M_2(x+c)}{r_2^3}, \; Y = -\frac{M_1 y}{r_1^3} - \frac{M_2 y}{r_2^3},$$

$$M_1 = Gm_1, \; M_2 = Gm_2, \; r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \; r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \; -$$

расстояния от первого и второго притягивающих центров до пробной частицы.

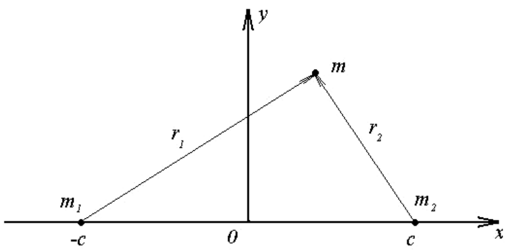

Рис. Пробное тело в поле двух притягивающих центров

Действующая сила с компонентами X и Y будет потенциальной:

$$X = -V_x\,,\ Y = -V_y\,,$$

где

$$V = -\frac{M_1}{r_1} - \frac{M_2}{r_2}. \qquad (1)$$

Решение этой задачи он сумел свести к квадратурам и частично исследовал их [1; 2] (см. также [3]).

В своей работе мы ставим целью дополнить имеющиеся результаты, а именно: показать, что кроме закона сохранения энергии задача Эйлера имеет еще один закон сохранения, квадратичный по скоростям. Оба закона сохранения после перехода к эллиптическим координатам позволяют сравнительно просто получить решение уравнений динамики в квадратурах. Это также будет сделано.

Законы сохранения, квадратичные по скоростям

Для рассматриваемого движения имеет место закон сохранения энергии: $E = T + V$, где $T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ — кинетическая энергия, а $V = V(x, y)$ — потенциальная энергия, выражение для которой дает формула (1).

Второй закон сохранения будем искать в виде: $F = H + W$, $W = W(x, y)$, где

$$H = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}A\dot{y}^2,\ \ \omega = x\dot{y} - \dot{x}y\,;$$

здесь A — некоторая константа, которая будет определена позже.

Условие $\dot{F} = \dot{H} + \dot{W} = 0$ приводит к следующей системе уравнений для функции $W(x, y)$:

$$W_x = y\left(yV_x - xV_y\right),\ W_y = -x\left(yV_x - xV_y\right) + AV_y\,.$$

Можно убедиться, что эта система совместна, если $A = -c^2$. Интегрируя ее, получаем:

$$W = -M_1 \frac{c(x-c)}{r_1} + M_2 \frac{c(x+c)}{r_2}.$$

Таким образом, в задаче Эйлера имеет место второй закон сохранения, квадратичный по скоростям:

$$F = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}c^2\dot{y}^2 - M_1 \frac{c(x-c)}{r_1} + M_2 \frac{c(x+c)}{r_2} = const .$$

Переход к эллиптическим координатам и интегрирование уравнений динамики

Эллиптические координаты определяются как корни следующего уравнения относительно λ:

$$Q(\lambda) = \frac{x^2}{c^2-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda} = 1 . \tag{2}$$

Декартовы координаты выражаются через эллиптические по формулам:

$$x^2 = (\xi - c^2)(\eta - c^2)/c^2, \quad y^2 = -\xi\eta/c^2 .$$

С их помощью находим следующее выражение для евклидовой метрики:

$$ds^2 = -\frac{\xi-\eta}{4}\left(\frac{1}{\xi(\xi-c^2)}d\xi^2 + \frac{1}{\eta(\eta-c^2)}d\eta^2\right).$$

Основываясь на нем, получаем представления через эллиптические координаты для сохраняющихся величин E и F:

$$E = -\frac{\xi-\eta}{8}\left(\frac{1}{\xi(\xi-c^2)}\dot{\xi}^2 - \frac{1}{\eta(\eta-c^2)}\dot{\eta}^2\right) +$$

$$+\frac{1}{\xi-\eta}\left((M_1+M_2)\sqrt{c^2-\xi} + (M_1-M_2)\sqrt{c^2-\eta}\right),$$

$$F = \frac{\xi-\eta}{8}\left(\frac{\eta}{\xi(\xi-c^2)}\dot{\xi}^2 - \frac{\xi}{\eta(\eta-c^2)}\dot{\eta}^2\right) -$$

$$-\frac{1}{\xi-\eta}\left((M_1+M_2)\eta\sqrt{c^2-\xi} + (M_1-M_2)\xi\sqrt{c^2-\eta}\right).$$

Благодаря им уравнения динамики интегрируются разделением переменных. Получаем:

$$\int \frac{d\xi}{R_1(\xi)} - \int \frac{d\eta}{R_2(\eta)} = C = const. \tag{3}$$

После замены $\xi = c^2 - u^2$, $\eta = c^2 - v^2$ (3) приводится к соотношению

$$\int \frac{du}{\sqrt{P_1(u)}} - \int \frac{dv}{\sqrt{P_2(v)}} = C , \tag{4}$$

где

$$P_1(u) = 2(u^2 - c^2)(Eu^2 + (M_1 + M_2)u - (c^2E + F)),$$

$$P_2(v) = 2(v^2 - c^2)(Ev^2 - (M_1 - M_2)v - (c^2E + F)).$$

Хотя оба интеграла в уравнении (4) являются эллиптическими, это уравнение можно использовать для изучения формы траекторий [3]. Простейшие траектории являются софокусными эллипсами и гиперболами.

Замечательное открытие Л. Эйлера состоит в определении многочисленного семейства непостоянных решений уравнений (3), для которых левая часть соотношения (4) является алгебраической функцией от u и v.

Заключение

Мы установили, что в задаче Эйлера о двух притягивающих центрах кроме закона сохранения энергии существует еще один закон сохранения, который также квадратичен по скоростям. Благодаря обоим законам сохранения и использованию эллиптических координат существенно упрощается процедура получения уравнений траекторий.

Список литературы

1. *Euler L.* Probleme. Un corps ètant attirè en raison rèciproque quarrèe des distances vers deux points fixes donnès, trouver les cas où la courbe dècrite par ce corps sera algèbrique //Histoire de L'Acadèmie Royale des sciences et Belles-lettres. (1760), 1767. V. XVI. P. 228—249.

2. *Euler L.* De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti //Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. (1764), 1766. V. X. P. 207—242.

3. *Герасимов И. А.* Задача двух неподвижных центров Л. Эйлера. Фрязино, 2007.

Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта.

А. Б. Афонасьева — студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

A. Zaytsev — Dr., IKSUR.

A. Afonasyeva — student, IKSUR.